خیام، سکه‌ها، مثلث و درستی استدلال

سید جمال بخشایش، سرگروه ریاضی استان چهارمحال و بختیاری

مقدمه

ریاضیات بر پایهٔ استدلال‌هایی شکل گرفته است که درستی آن‌ها، درستی ریاضیات را نتیجه داده‌اند. پس می‌توان گفت ریاضیات بر درستی استدلال‌ها استوار است. حال سؤال این است که آیا استدلال هم می‌شود اشتباه شود؟!

گاهی می‌خواهیم در یک استدلال، از جزئی به جزء دیگر برسیم، مثل اینکه عدد $۲^{۳}$ از عدد $۳^{۲}$ کوچک‌تر است. آیا از راه مشابهت، می‌توانیم نتیجه بگیریم که $۳^{۴}$ از $۴^{۳}$ کوچک‌تر باشد. آیا درست نتیجه گرفته‌ایم؟ نه، این استدلال درست نیست.

گاهی می‌خواهیم در یک استدلال، از جزء به کل برسیم، مثلاً، به کمک ماشین‌حساب، توان‌های متوالی عدد ۶ را به‌دست می‌آوریم:

$۶^{۱}=۶$ و $۶^{۲}=۳۶$ و $۶^{۳}=۲۱۶$ و $۶^{۴}=۱۲۹۶$ و ...

و این عمل را تا $۶^{۲۰}$ ادامه می‌دهیم. مشاهده می‌کنیم که در هیچ‌یک از این عددها، رقم سمت چپ، حاصل ۹ نیست. در این صورت، آیا می‌توانیم چنین حکم کنیم که «رقم سمت چپ هیچ توانی از ۶، ۹ نیست»؟

باز هم نه! هرگاه عمل ادامه یابد، معلوم خواهد شد که رقم سمت چپ عدد $۶^{۱۷۶}$ عدد ۹ است.

پس باید در استدلال‌هایمان، کمی دقت کنیم. در زیر به مسئله‌هایی می‌پردازیم که اهمیت این موضوع را خوب بیان می‌کنند.

مسئلهٔ ۱: خیام و بارهای شتر

گفته شده است که نمایندهٔ ملکشاه سلجوقی در شهر حلب، مأمور بود تا ۵۰۰ رطل سنگ مرمر را از حلب، به نزد سلطان بفرستد، پس از دو نفر شتردار که یکی ۶ شتر و دیگری ۴ شتر داشت، خواست تا این مأموریت را انجام دهند. شترداران ۵۰۰ رطل سنگ مرمر سلطان و هر کدام ۵۰۰ رطل سنگ مرمر مال‌التجارهٔ شخصی خویش را به تساوی، بار شتران کرده و به پایتخت سلطان بردند و امانت او را تحویل دادند. ملکشاه به خواجه نظام‌الملک دستور داد ۱۰۰۰ دینار به شترداران بدهد. خواجه ۶۰۰ دینار را به صاحب ۶ شتر و ۴۰۰ دینار را به صاحب ۴ شتر داد. عمرخیام، که ناظر بر این ماجرا بود، به تقسیم خواجه اعتراض کرد و استدلال کرد که ۸۰۰ دینار حق صاحب ۶ شتر و ۲۰۰ دینار حق صاحب ۴ شتر است. خیام چگونه استدلال کرده است؟

پاسخ:

شترداران روی هم، ۱۵۰۰ رطل سنگ را بار ۱۰ شتر کرده‌اند. پس بار هر شتر، ۱۵۰ رطل سنگ بوده است. صاحب ۴ شتر روی هم ۶۰۰ رطل سنگ بار داشته که ۵۰۰ رطل آن مربوط به مال‌التجاره شخصی و ۱۰۰ رطل آن، متعلق به سلطان بوده است. در صورتی‌که صاحب ۶ شتر روی هم ۹۰۰ رطل بار داشته که ۵۰۰ رطل آن، مال‌التجاره شخصی و ۴۰۰ رطل آن مال سلطان بوده است. بنابراین مبلغ ۱۰۰۰ دینار باید به نسبت ۱۰۰ و ۴۰۰ بخش شود.

مسئلهٔ ۲: غلطیدن سکه‌ها

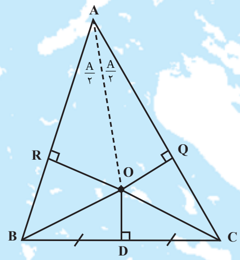
سکه‌ای به قطر دو سانتی‌متر روی زمین، یک دور کامل می‌غلطانیم. پایین‌ترین نقطهٔ محیط سکه در ابتدا و انتها را A و A' می‌نامیم. واضح است که فاصلهٔ A و A' به اندازهٔ محیط سکه است که برابر ۲π است.

اکنون یک دایرهٔ فرضی به مرکز سکه و به شعاع نصف سکه در نظر بگیرید. نقطهٔ پایین این دایره را B بنامید و موقعیت آن را در انتهای حرکت، B' بنامید. چون سکه یک دور کامل غلطیده است، پس دایرهٔ کوچک نیز یک دور کامل غلطیده است. در نتیجه، فاصلهٔ B و B' برابر با محیط دایرهٔ کوچک یعنی π است. اما به وضوح $AA'=BB'$. بنابراین $۲\pi = \pi$.

پاسخ:

غلطیدن، نوع خاصی از حرکتِ یک شکل، بر روی یک سطح است و زمانی رخ می‌دهد که سرعتِ حرکت نقطهٔ تماس روی سطح، برابر با سرعت حرکتِ نقطهٔ تماس روی شکل باشد. درغیر این صورت، می‌گوییم که شکل روی سطح سُر می‌خورد. در مسئلهٔ بالا نیز، دایرهٔ کوچک‌تر بر روی خط 'BB سُر می‌خورد، چون سرعت حرکت نقطهٔ تماس روی خط، برابر با سرعت حرکت نقطهٔ A روی خط است ولی سرعت حرکت نقطهٔ تماس روی دایره کوچک، نصف سرعت حرکت نقطهٔ A روی دایرهٔ بزرگ است.

مسئلهٔ ۳: همهٔ مثلث‌ها متساوی‌الساقین هستند



ثابت می‌کنیم همهٔ مثلث‌ها، متساوی‌الساقین هستند

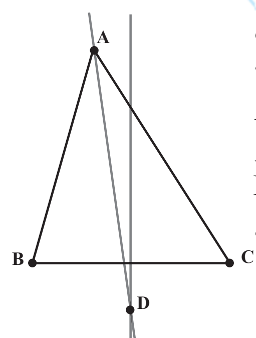
مثلث ABC را در نظر بگیرید. در شکل زیر، OD عمودمنصف ضلع BC و AO نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ است.

از نقطهٔ O به دو ضلع AC و AB، عمودهای OQ و OR را رسم کرده‌ایم. روشن است که دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AOQ و AOR، طبق وتر و یک زاویه، با هم برابرند. پس AR=AQ.

همین‌طور دو مثلث OQC و ORB طبق وتر و یک ضلع با هم برابرند، پس RB=QC.

در نتیجه، AR+RB برابر با AQ+QC است. بنابراین AB=AC است. این نشان می‌دهد که هر مثلث دلخواه متساوی‌الساقین است. کجای استدلال اشتباه است؟!

پاسخ



استدلال فقط در حالتی درست است که نقطهٔ D داخل مثلث باشد، در حالی که برای مثلث‌های غیر متساوی‌الساقین، نقطهٔ D بیرون مثلث قرار می‌گیرد، مانند شکل روبه‌رو:

مسئلهٔ ۴: آیا ۱- =۱+ است؟

تناسب زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{x+۱}{a+b+a}=\frac{x-۱}{a+b-۱}$$

دو طرف را در صورت، تفضیل به نسبت می‌کنیم؛

$$\frac{x+۱-(a+b+۱)}{a+b+۱}=\frac{x-۱-(a+b-۱)}{a+b-۱}$$

$$\frac{x-a-b}{a+b+۱}=\frac{x-a-b}{a+b-۱}$$

چون دو کسر برابرند و صورت‌های آن‌ها برابرند، پس مخرج‌های آن هم برابرند و در نتیجه، ۱- =۱+ ! اشتباه در چیست؟

پاسخ

اگر دو کسر برابر و صورت‌های آن‌ها نیز برابر باشند! به شرط آنکه صورت‌ها مخالف صفر باشند، می‌توان نتیجه گرفت که مخرج‌ها نیز برابرند. تناسبِ داده شده، معادله‌ای است که x=a+b جواب آن است و در نتیجه، صورت‌های کسرهای حاصل، برابر صفر است.

مسئلهٔ ۵: هزار تومان گم‌شده

حمید و سعید و وحید، به یک کتاب‌فروشی رفتند تا یک کتاب بخرند. قیمت کتابی که می‌خواستند ۳۰۰۰۰ تومان بود. هر یک از آن‌ها، ۱۰۰۰۰ تومان دادند و کتاب را خریدند وقتی صاحب مغازه بازگشت به فروشنده گفت که قیمت کتاب ۲۵۰۰۰ تومان بوده و ۵۰۰۰ تومان به او می‌دهد تا به سه خریدار، بازگرداند. ولی فروشنده، تنها ۳۰۰۰ تومان به سه خریدار باز می‌گرداند و ۲۰۰۰ تومان دیگر را خودش برداشت.

اکنون حمید و سعید و وحید، هر یک ۹ هزار تومان داده‌اند که می‌شود ۲۷۰۰۰ تومان و ۲۰۰۰ تومان هم که در جیب فروشنده است که روی هم می‌شود ۲۹۰۰۰ تومان. پس ۱۰۰۰ تومان باقی‌مانده، چه شده است؟

پاسخ

هیچ پولی گم نشده است، بلکه محاسبهٔ بالا اشتباه است! محاسبهٔ صحیح به این صورت است که ۲۵۰۰۰ تومان نزد صاحب مغازه است، ۳۰۰۰ تومان هم به حمید و سعید و وحید برگردانده شده است و ۲۰۰۰ تومان هم فروشنده برداشته است که در مجموع می‌شود ۳۰۰۰۰ تومان.

در واقع، از مجموع ۳۰۰۰۰ تومانی که حمید و سعید و وحید به فروشنده دادند، ۲۵۰۰۰ تومان آن قیمت کتاب بود که اکنون نزد صاحب مغازه است و از ۵۰۰۰ تومان باقی‌مانده، ۳۰۰۰ تومانش به آن سه نفر بازگشته و ۲۰۰۰ تومانش، نزد فروشنده است.

منبع

۱. مصحفی، عبدالحسین. (۱۳۶۶). **منطق و استدلال**. انتشارات فاطمی.

۲. صلواتی، عرفان و مشایخی، سعید. (۱۳۹۵). **استدلال ریاضی (پروژه دومین اردوی آموزشی بتا)**. خمین